数理解析研究所講究録
152巻 1972年 97-107

Group の C-generator について

相模工大　津久井康之

3-dimensional topology の研究に 1-dim. homology group と fundamental group (1-dim. homotopy group) は基本的である。実際には空間の中の loops の, base point をもたない homotopic (free-homotopic) の関係を調べたい場合が多いが、よく知られるように free-homotopic という relation は group を形成しない。

以下ではこの free-homotopic という関係を fundamental group の中でいくらかでも反映して考えるために C-generating set という概念を定義する。このことによって group の新しい invariant が導かれる。また途中、いくつかの群論的な問題も提起される。Group の algorithm (例えば C-generating set であるかどうかの判定) は悲観的で、特別な結果は得られていない。この講演では、基本的な性質といくつかの examples そして問題提起にとどまる。

§1 以下で考える group は全て finitely generated とする。また $[G,G]$ は group G の commutator subgroup で

$$\phi : G \longrightarrow \hat{G} \equiv G/[G,G]$$

を natural onto homomorphism とする。

<u>Definition 1</u> group G の elements の finite set $\mathcal{G}=\{x_1,\cdots,x_n\}$ が G の X-generating set である（$X=A, C$ or E）とは，任意の G の element $g \neq 1$ に対して

(1) $X=E$ (*essencial*) $\quad g=\prod_j x_{i_j}^{\varepsilon_j}$

(2) $X=C$ (conjugate) $\quad g=\prod_j \omega_j^{-1} x_{i_j}^{\varepsilon_j} \omega_j$

(3) $X=A$ (*abelian*) $\quad \phi(g)=\sum_j \phi(x_{i_j}^{\varepsilon_j})$

と表わせることである。ここに $\varepsilon_j=\pm 1$, $\omega_j \in G$, $x_{i_j} \in \mathcal{G}$。set $\mathcal{G}$ が group G の X-generating set のとき略して $\mathcal{G}=\mathcal{G}_X(G)$ と記す。また $\mathcal{G}_X$ の elements の数 n を $n=n(\mathcal{G}_X, G)$ とし、G におけるその最小数を G の X-number と呼び

$$n_X(G)=\min\{n(\mathcal{G}_X . G) \mid \mathcal{G}_X \text{ は } G \text{ の X-generating set}\}$$

で表わす（$X=A, C, E$）。

<u>Definition 2</u> group G の element g_1 が G の X-generator であるとは、他に G の elements $g_2, g_3, \cdots, g_n$, $n=n_X(G)$ があって，$\{g_1, g_2, \cdots, g_n\}$ が G の X-generating set になるときをいう。

Definition 3　NG を finitely generated non-abelian groups 全体のなす set とし

$$AE = \{G \in NG \mid G \text{の任意の A-generating set は E-generating set}\}$$

とする。NG の subsets AC, CE も同様に定義する。

Remark　E-generating set とは普通 "a set of generators for a group" と呼ばれるもので、記述の容易さのためにこう名づけた。A-generating set は $\hat{G} \equiv G/[G,G]$ の E-generating set を $\phi : G \to \hat{G}$ でひきもどしたといえるもので $n_A(G) = n_E(\hat{G})$ である。G がある空間の fundamantal group なら $\hat{G}$ はその空間の 1-dim. homology-group で、C-generating set はこの gap をある程度埋めたいと定義したものである。Definition 1, 2. が無意味でないことは以下のいくつかの例で示される。Definition 3 については後に $AC \neq \phi$ は示されるが他の 2 つについては、私には分っていない。

次の命題は definition から明らかである。

Proposition 1　(1) E-generating set ⇒ C-generating set ⇒ A-generating set.

(2) $n_E(G) \geq n_C(G) \geq n_A(G) = n_E(\hat{G})$, for any group G

(3) G が abelian group ⟹ E-generating set = C-generating set = A-generating set.

(4) $n_E(G) = 0 \Leftrightarrow n_C(G) = 0 \Leftrightarrow G = \{1\}$.

(5) $AE = AC \cap CE$ 。

<u>Proposition 2</u>　M を 3-sphere S^3 内の connected closed 2-submanifold（PL-submanifold）とする。V^3 を S^3-M の component の任意の1つとすると、V^3 の fundamental group $\pi_1(V^3)$ について

$$n_C(\pi_1(V^3)) = \text{genus of } M \text{。}$$

このことは V^3 が S^3 内のある linear graph の complement と homeo. になることからただちに導かれる。$n_E(G) \neq n_C(G)$ なる G の簡単な例としてはこの proposition からすぐに、

<u>Corollary</u>　G を S^3 内の non-trivial knot の knot group とすると

$$n_E(G) \gneqq n_C(G) = n_A(G) = 1 \text{。}$$

このように space の fundamental group については n_E よりも n_C の方が topological な考察から容易に導かれる場合が多い。S^3 内の link の group の C-number n_C は丁度 link の components の数に等しい。しかしここまでの例ではまだ $n_C = n_A$ である。

§2

<u>Proposition 3</u>　G を free group で Z（infinite cyclic）でないとする。

(1) $n_E(G) = n_C(G) = n_A(G)$

(2) G の C-generating set でない A-generating set $\mathcal{G}_A$ ($n(\mathcal{G}_A, G) = n_C(G)$) が存在する。

(3) E-generating set でない C-generating set $\mathcal{G}_C$ ($n(\mathcal{G}_C, G) = n_E(G)$) が存在する。

証明は(1)は明らか、(2)は example 1 で、(3)は example 2, 3, 4 で示す。example 4 は(3)がもうすこし強い形にできることを示している。

group G の elements の set $\{w_1, w_2, \cdots, w_k\}$ があって、その各 element w_i が G の E-generator で represent されているとき、G に $w_1=1, w_2=1, \cdots, w_k=1$ という relation をつけ加えて新しく得られる group を $(G; w_1, w_2, \cdots, w_k)$ で表わす。次のことはかんたんにこえて C-generating set の判定の可能性を与える。

<u>Proposition 4</u>　group G の elements の finite set $Y=\{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ が C-generating set である必要十分条件は $(G; y_1, \cdots, y_m)=\{1\}$ である。

このことは E-generating set が group を generate する, 生かす, ものであるのに対して, C-generating set が名前は generating set であるが group を trivial にするもの, 殺すもの, であることを示している。一般に $n_E(G) \geq n_C(G)$ ということは実に, 壊わすより作る方が大変だということである。

<u>Example 1</u>　$G=(x, y; 1) \cong Z * Z$ ($*$ は free product を意味する) とする。$g_A=\{x^5y^3, xyxy^{-2}\}$ が G の A-generating set であることは $\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1$ からあきらか。もし g_A が G の

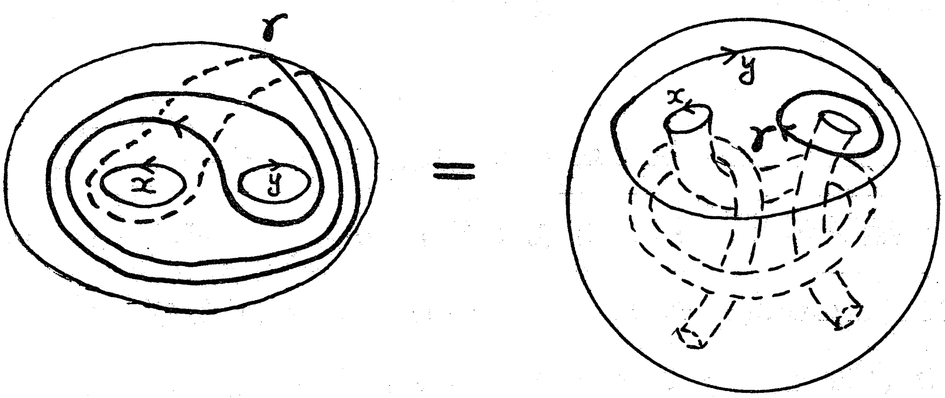
C-generating set ならば proposition4 から、$G'=(G;x^5y^{-3},xyxy^{-2})=\{1\}$ のはずである。ところが $G'=(x,y;x^5y^{-3},(xy)^2y^{-3})$ はよく知られるように Poincaré manifold の fundamental group で trivial ではない。従って $\mathcal{G}_A$ は G の C-generating set ではない。逆に simply connected でない homology sphere の fundamental group の finite presentation の relator 全体を $\mathcal{G}$ とおけば、これが上の $\mathcal{G}_A$ と同じ性質を持つことがわかる。

なおこの group G' について，G' は non-abelian だから $n_E(G')=2$、$(G';y)=\{1\}$ 故 $\{y\}$ は G' の C-generating set で $n_C(G')=1$、$\widetilde{G'}=\{1\}$ だから $n_A(G')=0$ で、$n_E(G')>n_C(G')>n_A(G')$ となり definition 1 の C-generating set の定義が無意味でないことがわかる。

<u>Example 2</u>　G は example 1 と同じとし $\mathcal{G}_c=\{xyx^{-1},y^{-1}xy\}$ とする。$\mathcal{G}_c$ が C-generating set であることは明らかで、もし E-generating set であるならば　$G'=(G;(xyx^{-1})(y^{-1}xy)^{-1})\cong Z$ のはずである。ところが　$G'=(x,y;xyx^{-1}y^{-1}x^{-1}y)$ は trefoil knot の group で Z でない、よって $\mathcal{G}_c$ は E-generating set ではない。しかし $\{x,xyx^{-1}\}$、$\{y,y^{-1}xy\}$ が共に E-generating set であることは明らかだから、xyx^{-1}、$y^{-1}xy$ はそれぞれ E-generator である。このことが一般には成立しないことを次の 2 つの examples が示している。

<u>Example 3</u>　group $G=(x,y\,;1)$ は example 1, 2 と同じ。
$\gamma = xy^{-1}xyx^{-1}y$ とすると、$x=\gamma\cdot y^{-1}(xy^{-1}x^{-1})y$ ゆえ $\mathcal{G}=\{\gamma, y\}$ は C-generating set である。$(G;\gamma)\not\cong \mathbb{Z}$ から $\mathcal{G}$ は E-generating set でないし、また γ は E-generator でない。

なお example 2 の $\mathcal{G}_c$, example 3 の $\mathcal{G}$ はともに genus 2 の solid torus の fundamental group の elements としてその boundary 上に simple loops で represent できることに注意しておく。



<u>Example 4</u>　$G=(x,y\,;1)$ は上と同じ。
$(G\,;x^5y^3, x^7y^4) = (x,y\,;x^5=y^{-3},\ y^{-1}=x^2) = (x,y\,;x^5=x^6,\ y^{-1}=x^2)=\{1\}$
であるから $\mathcal{G}=\{x^5y^3, x^7y^4\}$ は G の C-generating set である。
しかし、$(G\,;x^5y^3)$ と $(G\,;x^7y^4)$ はどちらも $\mathbb{Z}$ でないから、x^5y^3 も x^7y^4 も共に E-generator ではない。 この $\mathcal{G}$ については前と異なり genus 2 の solid torus の fundamental group の elements としてその boundary 上に simple loops として disjoint には現わせなかろう。

genus n の solid torus T_n の fundamental group G は free group で $n_E(G)=n_C(G)=n$。$\mathcal{G}$ を G の C-generating set でそのすべての elements が ∂T_n 上に simple loops で disjoint に表現されるもので、$n(\mathcal{G},G)=n$ であるとする。このとき次の事はあきらか。

<u>Proposition 5</u>　「上のような任意の n と $\mathcal{G}$ に対して、すくなくも 1 つの $\mathcal{G}$ の element は G の E-generator である」が正しければ Poincaré conjecture も正しい。

しかしこのような方向での Poincaré conjecture への attack は全く絶望的で、例えばある G の element が ∂T_n 上に simple loop で represent できるかどうかについては Reinhart [2] があるが完全ではないようである。それよりも proposition 5 の逆が成立するかどうかの方が興味ある問題ではなかろうか、すくなくも 3-sphere S^3 の性質をいくらかは明らかにすると思われる。

<u>Proposition 6</u>　任意の A-generating set がまた C-generating set であるような non-abelian group が存在する（すなわち $AC \neq \phi$）。

これは具体的に次の example 5 の中で示される。

<u>Example 5</u>　$G=(x,y\,;\,x^2,y^2)\cong Z_2*Z_2$ とすると $G\in AC-CE$.
G の 1 でない element g は 次の 4 つ の形のうちのどれか 1 つで表わされる；

(1) $(xy)^k x$　(2) $y\cdot(xy)^k$　(3) $(x\cdot y)^h$　(4) $(yx)^h$, $k\geq 0$, $h\geq 1$ 。

このことからまず、G の任意の A-generator が C-generator になることは簡単に分かる。$\{g_1, g_2\}$ が G の A-generating set であるとき g_1, g_2 は各々上の (1)〜(4) の形のどれかで表わされているということからその組み合せを全て調べることによって $G\in AC$ を得る。また、例えば $\{(xy)^{18}\cdot x, (xy)^3\cdot x\}$ は E-generating set でない C-generating set であることが確められて、$G\notin CE$ を得る。

§3

group G の E-number $n_E(G)$ と free product との関係については、

B.H. Newmann [1]；　$G=G_1*G_2$ ならば $n_E(G)=n_E(G_1)+n_E(G_2)$ 。

がある。　このことが C-number $n_C(G)$ については一般には成立しないことは次の example 6 に示される通りである。A-number $n_A(G)$ については　$\widetilde{G_1*G_2}=\widetilde{G_1}\times\widetilde{G_2}$ から、

$\widetilde{G_1*G_2}$ が free abelian の時　$n_A(G_1*G_2)=n_A(G_1)+n_A(G_2)$ 。

<u>Example 6</u>　$G=(x,y\,;\,x^2,y^3)\cong Z_2*Z_3$ とする。

$t = yx^{-1}$ とおくと

$$y = y^4 = t(x^{-1}tx)t(x^{-1}tx) \quad (= yx^{-1}(x^{-1}yx^{-1}x)yx^{-1}(x^{-1}yx^{-1}x))$$

$$x = t^{-1}y = (x^{-1}tx)t(x^{-1}tx)$$

と G の generator (E-generating set) $\{x, y\}$ が t の conjugate の product で表わされるから $\{t\}$ は G の C-generating set であって、$n_c(G) = 1$。$n_c(Z_2) = n_c(Z_3) = 1$ 故 $n_c(Z_2 * Z_3) \neq n_c(Z_2) + n_c(Z_3)$。

Definition 1 に見る通り、C-generating set という概念は A-generating set と E-generating set の中間にあるのだから free product に関しても似たような性質を持つのではないかと思える。そこで、

<u>Conjecture</u> 2つの group G_1 と G_2 の free product $G_1 * G_2$ が

① finite order の element をもたない

② $\widetilde{G_1 * G_2} = \widetilde{G_1} \times \widetilde{G_2}$ は free abelian

ならば $n_c(G_1 * G_2) = n_c(G_1) + n_c(G_2)$ であろう。

この Conjecture は Knot group (C-number は 1) が indecomposable であることのある意味での拡張になっている。example 6 は上の条件①②とも満していないが、あるいは②は不必要か又はもっと弱められるかもしれない。

ここまでのいくつかの問題をまとめてみると、

問題 1. CE, AE は empty であるか。 AC(CE, AE)を characterize せよ。

問題 2. example 5 の性質(G∈AC)をもつ group で indecomposable なものをさがせ。

問題 3. 上の conjecture を(必要なら条件を強めて)証明せよ。(特に $\widehat{G_1 * G_2} = \{1\}$ の時をまず示せ。)

問題 4. Proposition 5 の逆を証明せよ。

問題 5. C-generating set の definition には finitely generated という条件は特に必要ではない。infinitely generated group で C-number が finite であるものがあればそれらをみつけ出して、characterize せよ。

なお C-generator という呼び名は Combinatorial Topology 研究集会,(1971.2月 京都・数理解析研)において細川先生(神戸)が Poincaré conjecture についての講演の中で使われたもので、ここではそれを少し整理した形で用いています。またこの講演はその時の細川先生の「予想」の反例(example 2~4)を作ることから出発したものです。

参照文献

[1] B.H. Newmann, On the number of generators of a free product, J. London Math. 18(1943).

[2] B.L. Reinhart, Algorithms for Jordan curves on compact surfaces, Ann. of Math 75(1962).